**시지프스의 고민**

역학적 에너지의 보존

2018-12967 컴퓨터공학부 박재문

1. **서론**

**1.1. 실험 목적**

이번 실험의 경우 보존력만이 작용하는 계에서 역학적 에너지, 즉 중력 퍼텐셜 에너지와 운동 에너지의 합이 보존되는지를 알아보는 것을 목적으로 한다. 또, 이가 보존되지 않는다면 비보존력인 마찰력이 역학적 에너지에 어떠한 영향을 미치는지 알아본다.

**1.2. 배경 지식**

1.2.1. 물리학에서의 운동

물리학에서는 시간에 따라 물체의 위치가 변하는 것을 ‘운동’으로 정의한다. 물체가 운동을 하여 위치가 변하면 위치가 변한 정도를 변위라 하고, 시간에 따라 물체의 변위가 변하는 정도를 속도라 하며, 시간에 따라 물체의 속도가 변하는 정도를 물체의 가속도라고 한다. 즉 속도는 물체가 빨리 움직이는 정도, 가속도는 물체의 빠르기가 변하는 정도이다. 각자를 식으로 나타내면 다음과 같다.

-(순간) 속도:

-(순간) 가속도:

여기서 t는 시간, D는 물체의 변위, v는 물체의 속력, a는 가속도를 나타낸다. 일반적으로 물체의 속도와 가속도를 표현할 때에는 순간 속도/가속도를 쓴다.

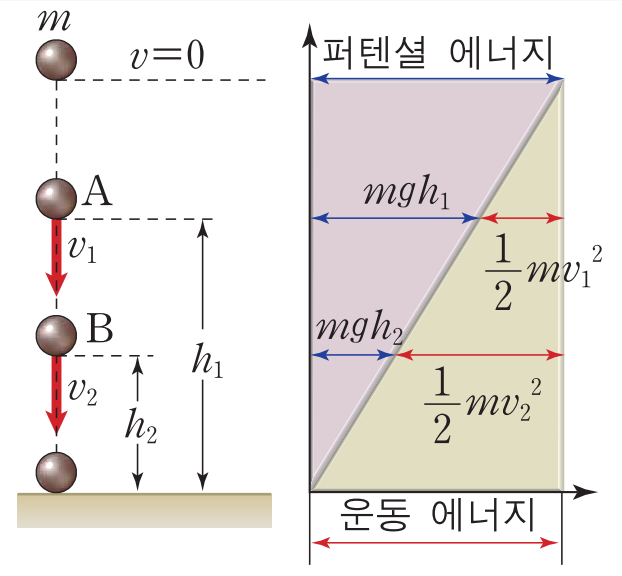
1.2.2. 역학적 에너지

a) 정의

물체가 운동을 할 때, 물체의 운동 상태에 따라 결정되는 퍼텐셜 에너지와 운동 에너지의 합을 역학적 에너지라고 정의한다. 여기서 퍼텐셜 에너지란 운동에너지로 바뀔 수 있거나 일을 할 수 있는 잠재적인 능력을 말하고, 운동에너지는 운동을 하고 있는 물체가 갖는 에너지로, 정지 상태에서 그 상태까지 가속시키는 데에 필요한 일의 양으로 정의한다.

b) 역학적 에너지 보존의 법칙

보존력만이 작용하는 계에서는 역학적 에너지가 퍼텐셜 에너지와 운동 에너지의 합으로 일정하게 정해진다.



위 그림에서 역학적 에너지가 물체의 높이에 따라 어떻게 유지되는지 볼 수 있다.

중력만이 작용하는 계를 생각해보자. 여기서 지표면을 기준점으로 생각하면, 물체가 가지는 중력 퍼텐셜 에너지의 크기는 (m은 물체의 질량, g는 중력 가속도, h는 물체로부터 지표면까지의 수직 높이)이다. 또한 물체가 속력 로 운동할 때 갖는 운동에너지의 크기는 로 정의된다. 따라서 물체가 병진 운동만을 할 때, 물체의 역학적 에너지는

로 일정하게 유지된다.

c) 구르는 공의 역학적 에너지

공이 직선 운동을 하는 데에도 에너지가 필요하듯, 공이 회전하는 데에도 역시 에너지가 필요하다. 이때 필요한 에너지를 회전운동에너지라 하고, 그 크기는 이다. 여기서 는 공의 관성 모멘트, 는 물체의 각속도이다. 관성 모멘트와 각속도에 대해서는 저번 실험에서 다루었다. 구의 질량이 m, 반지름이 r일 때, 밀도가 균일한 구의 관성모멘트의 이론적인 값은 이고, 이에 따라 공이 바닥을 미끄러짐 없이 구른다는 가정 하에 (여기서 r은 공의 유효 반지름으로, 공의 중심이 실제 운동면으로부터 얼마나 떨어져 있는지를 나타낸다. 은 공의 중심의 속도이다.) 따라서, 앞에서 고려한 물체의 병진 운동 에너지와 회전 운동 에너지를 동시에 고려했을 때 물체가 가지는 총 운동 에너지는

이 된다.

1.2.3. 구심력

구심력은 물체가 원운동을 할 때에 물체에서 이동 경로의 중심 방향으로 잡아당겨 물체의 방향을 바꿔주는 힘을 말한다.

질량이 m인 어떤 물체가 반경이 R인 원형 귀도를 따라 속도 v로 운동할 때의 구심력의 크기 는

이다.

1. **본론**

**2.1. 실험 방법**

실험의 본래 목적은 끝에 원궤도가 있는 경사진 궤도에서, 궤도의 각도, 공의 질량을 조절하면서 공의 역학적 에너지가 보존이 되는지 확인하고 어떠한 상황에서 물체가 원궤도를 완벽하게 통과하는지 보기 위함이었다. 하지만 실험 과정에서 공이 궤도를 따라 운동할 때 공의 재질이 플라스틱과 유사한 재질로 이루어져 있는 관계로, 궤도면과의 마찰력이 충분치 않아 미끄러지면서 회전하는 운동을 하는 것을 발견하였다. 이에 따라 미끄러지지 않고 회전 운동하는 공의 운동 에너지를 실제 실험에 적용하는 데에 어려움이 있다. 따라서 운동 중 작용하는 마찰력의 크기가 일정하다 가정하고, 각 각도에서의 이론적인 중력에 의한 가속도의 값과 실제 가속도의 값을 비교하여 마찰력의 영향을 알아본 후, 이를 고려하여 물체의 운동을 분석하여 본다. 또한 물체가 원궤도를 완전히 돌기 위해 필요한 수직 높이를 각 각도마다, 공마다 측정하고 이론치와 비교하여 본다.

**2.2. 실험 결과**

실험은 경사각 40도, 45도, 50도 3가지로 각도마다 작은 공, 큰 공 각각 3번씩 진행하였다. 원 궤도 반지름의 길이는 0.15m이고, 두 공의 정보는 다음과 같다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 질량(kg) | 반지름(m) | 유효반지름(m) |
| 큰 공 | 0.0545 | 0.02 | 0.0172 |
| 작은 공 | 0.0310 | 0.015 | 0.0118 |

이에 따라 두 공의 이론적 관성 모멘트의 값은

큰 공: ∙

작은공: ∙

또한 각 각도 별로 마찰이 없을 때의 이론적 가속도, 물체의 실제 측정 가속도, 이 두 차이로 예상되는 마찰 가속도는 다음과 같다. 물체의 가속도는 재질이 같고 질량이 다른 두 공에서는 거의 동일하게 작용해야 하기 때문에, 측정값은 큰 공과 작은 공으로 실험한 값을 평균 내어 구한다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 이론값() | 측정값() | 마찰() |
| 40° | 6.300 | 5.723 | 0.577 |
| 45° | 6.930 | 6.445 | 0.485 |
| 50° | 7.507 | 7.1 | 0.407 |

이제 공이 직선운동을 할 때에 마찰력이 한 일을 전체 에너지 변화량에서 배제시켜 회전운동에너지의 값을 알 수 있다. 그렇다면 물체의 운동에서 역학적 에너지가 얼마나 보존되는지에 대한 자료를 보자. 숫자는 실험 시 빗면의 경사각을, 숫자 뒤 s는 작은 공임을 나타낸다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | ∆퍼텐셜에너지(J) | ∆운동에너지(J) | 차이(J) |
| 40° | 0.194 | 0.163 | 0.0303 |
| 45° | 0.249 | 0.221 | 0.0273 |
| 50° | 0.264 | 0.289 | 0.0248 |
| 40°s | 0.109 | 0.0873 | 0.0213 |
| 45°s | 0.137 | 0.115 | 0.0192 |
| 50°s | 0.158 | 0.140 | 0.0181 |

이 때, 운동에너지는 으로 계산한 값으로, 회전운동에너지는 고려하지 않은 값이다. 이제 각 결과에서 측정할 동안 공이 이동한 거리와 위에서 구한 마찰 가속도, 물체의 질량을 곱해서 마찰력이 한 일을 구할 수 있다. 이제 퍼텐셜 에너지의 변화량에서 운동 에너지의 변화량을 뺀 값에 마찰력이 한 일을 뺀 값을 회전운동에너지로 생각할 수 있다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 퍼텐셜E-운동E(J) | 마찰력의 일(J) | 회전E(J) |
| 40° | 0.0303 | 0.0186 | 0.0117 |
| 45° | 0.0273 | 0.0178 | 0.0095 |
| 50° | 0.0248 | 0.0157 | 0.0091 |
| 40°s | 0.0213 | 0.0101 | 0.0112 |
| 45°s | 0.0192 | 0.00989 | 0.00931 |
| 50°s | 0.0181 | 0.00905 | 0.00905 |

여기에서 마찰이 하는 일과 회전운동 에너지가 경사면의 각도가 커질수록 감소하는 것을 볼 수 있는데, 이는 경사면의 각도가 커질수록 물체가 받는 경사면에 대한 수직 항력이 감소하여 마찰력이 감소하고, 회전운동 역시 마찰력에 의해 발생하므로 마찰력이 작아짐과 동시에 회전운동 에너지의 크기도 감소한다. 마지막으로, 앞에서 구한 운동에너지의 변화량에서 물체가 미끄러짐 없이 운동할 경우 가지게 되었을, 유효 반지름을 고려한 회전운동 에너지를 유도해 낼 수 있고, 이를 실제 회전 운동 에너지와 비교해 볼 수 있다.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 가상회전운동 E(J) | 실제회전운동E(J) |
| 40° | 0.0493 | 0.0117 |
| 45° | 0.0669 | 0.0095 |
| 50° | 0.0875 | 0.0091 |
| 40°s | 0.0216 | 0.0112 |
| 45°s | 0.0285 | 0.00931 |
| 50°s | 0.0347 | 0.00905 |

실제로 물체가 미끄러지지 않는다면 병진 운동 에너지가 현재 값보다 작아, 가상회전운동 E가 조금 더 작은 값이 나와야 한다. 하지만 가상과 실제의 차이가 워낙 크므로 공이 미끄러지면서 운동한다는 사실을 실험 결과로도 보일 수 있다.

이제 물체가 원궤도를 완전히 돌기 위해 필요한 물체의 최소높이를 살펴본다. 이론상으로는 같은 원 궤도를 운동한다는 전제 하에 공의 최소 높이는 항상 일정하고, 이 실험의 경우는 그 높이가 지표면으로부터 37.5cm 위이다. 아래 표는 실제로 측정했을 때 공이 필요했던 최소 높이의 값을 나타낸다. 값의 계산은 공을 낙하시키기 시작한 지점으로부터 원 궤도까지의 거리를 재고, 이에 현재 경사각의 사인값을 곱하는 식으로 한다. 길이는 5cm 단위로 측정한다.

|  |  |
| --- | --- |
|  | 지표면으로부터 높이(cm) |
| 40° | 44.995 |
| 45° | 45.962 |
| 50° | 45.963 |
| 40°s | 48.209 |
| 45°s | 49.497 |
| 50°s | 45.963 |

실험 결과 모든 값이 이론값과 차이가 많이 남을 알 수 있다. 이론값에서는 물체에 작용하는 회전운동에너지와 마찰력을 고려하지 않지만, 실제 실험에서는 모든 요인들이 복합적으로 작용하기 때문에 이런 결과를 얻게 된다.

**2.3. 오차 원인 분석**

이번 실험의 경우는 오차 원인으로 꼽을 수 있는 것이 다양하다. 이것들을 하나 나열해 보도록 한다.

1) 부정확한 물리량: 기본적으로 공과 궤도의 반지름, 공의 유효 반지름, 낙하 높이 등의 길이 측정이 나무 자를 이용한 사람 눈으로 측정한 것이어서 실제 값과 차이가 있을 수 있다.

2) 측정 간격: 가속도와 에너지량을 계산하는 실험의 경우, 각 실험을 3번씩 진행하면서 세 번 모두 사용 가능한 데이터가 있는 시간대를 골라 평균을 내어 데이터를 계산했고, 이 과정에서 각 실험마다 사용한 데이터의 시간 범위가 달라 오차가 발생할 수 있다. 특히 운동 에너지의 경우 0.066초 동안 움직인 거리를 통해 순간 속도를 계산하여 운동 에너지 식을 세웠는데, 실제 순간속도가 아닌 일정 시간에 따른 평균 속도를 사용함에 따라 값에 오차가 생길 수 있다.

3) 실험 재료에 따른 오차: 이번 실험의 원래 목적은 미끄러짐 없는 공이 구를 때 생기는 회전운동 에너지를 고려할 때 역학적 에너지가 어떻게 되는지 보기 위함이다. 하지만 실험에서 사용된 공이 고무공이 아니어서 미끄러지긴 하지만, 회전을 하기도 하는 관계로 회전을 무시할 수도, 마찰을 무시할 수도 없다. 하지만 공이 어느 정도의 빠르기로 회전을 하는지를 측정할 방법도 없으므로, 측정한 결과를 바탕으로 물체의 회전운동 에너지를 예측하는 방법밖에 없었다. 이러한 계산 과정에서 오차가 생기게 된다.

4) 가정에 따른 오차: 위 실험에서 결과를 도출하기 위해 이번 실험에서는 실제와는 다른 가정들을 많이 하였다. 우선, 실제로 전체 에너지는 회전/병진 운동 에너지, 마찰력이 한 일, 중력 퍼텐셜 에너지를 제외하고도 운동 시작 시 손이 가한 미세한 운동 에너지, 구르면서 생기는 소리의 에너지 등 작지만 존재하는 값들이 있다. 또한 위에서 언급했듯, 물체가 실제로 미끄러짐 없이 운동한다면 마찰력이 더 강하여 병진 운동 에너지의 값이 더 작게 나와야 하지만 이를 무시하여 예상한 회전운동 에너지와 측정에서 계산한 회전운동 에너지의 차이가 예상보다 크다.

**3. 결론**

첫번째 실험은 일, 이차원 공간에서 물체의 병진 운동을 살펴 보는 것이 주 목적이었고, 두번째 실험에서는 회전 운동에 대해 알고, 관성 모멘트라는 것이 회전 운동에 어떤 영향을 끼치고, 어떻게 측정/계산하는지 알아보았다. 앞서 한 두 실험에서 얻은 병진 운동과 회전 운동에 대한 지식을 종합하여 적용할 수 있었던 것이 이번 실험이다. 이번 실험에서는 마찰력이 작용하는 경사면과 원 모양 궤도에서 운동하는 물체의 움직임을 분석하여 물체의 병진, 회전 운동에너지를 측정/계산하고, 이 과정에서 물체가 잃은 퍼텐셜 에너지를 측정하여 역학적 에너지 보존의 법칙이 적용되는지 확인해 보았다. 이 실험의 경우 궤도와 공 사이에서 작용하는 마찰력에 의해 역학적 에너지가 완전히 보존될 수는 없었고, 대신 전체 에너지량이 보존된다는 사실을 통해 퍼텐셜 에너지 대비 손실된 운동 에너지로 마찰력이 물체에 하는 일을 계산해 보았다. 또한 물체가 원 모양 궤도를 완벽하게 지나가기 위해서는 일정한 높이에서 낙하시키는 것이 필요한데, 이 높이의 이론값과 실험값이 일치하는 지 확인해 보았다. 이론값은 물체가 마찰력을 받지 않는 경우에 해당하는 값으로, 실제 값은 이 값보다 전반적으로 크게 측정되었다. 또한 이번 실험의 경우 그 과정에서 오차를 발생시킬 만한 요인이 여럿 있었다. 우선 길이를 측정하는 과정에서 부정확한 측정으로 인하여 오차가 생길 수 있다는 점, 물체의 운동 측정에 시간 간격이 있어서 실제의 물체의 물리량과 측정에서 도출해 낸 물리량이 차이를 보일 수 있다는 점, 실험 계획과는 다르게 공이 미끄러지는 동시에 구르는 운동을 하여 부가적으로 필요한 여러가지 계산 과정에서 오차가 발생할 수 있는 점, 마지막으로 여러가지 계산을 하는 과정에서 실제로는 정확히 알 수 없는 정보들을 다양한 가정으로 얼추 계산하여 실제와는 값이 다소 차이가 날 수 있었다는 점이 있었다. 비록 오차의 요인이 많았지만 각도의 변화에 따른 측정값의 변화를 충분히 설명할 수 있었다. 예를 들어, 물체의 마찰력이 일정하다고 가정하여 계산한 마찰 가속도의 경우 직접 측정한 값은 아니지만, 수직 항력이 약해질수록 마찰력이 함께 약해진다는 사실과 잘 부합하는 결과를 얻었다. 직접 실험을 하는 과정에 있어 실험 도구들이 아주 전문적이진 않고, 실험을 진행하는 학생 역시 물리학에 대해 전문이 아니므로 정확한 실험을 해내기에는 어려움이 있을 수 있다. 하지만 배운 지식을 적절히 활용하여 실험만을 통해 얻을 수 없던 값들을 알아감을 통해 물리 현상에 대해 더 깊은 이해를 할 수 있다.

4. 참고 자료

자료 참고: 위키백과-역학적 에너지

<https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%97%AD%ED%95%99%EC%A0%81_%EC%97%90%EB%84%88%EC%A7%80>

사진: 역학적에너지보존<http://study.zum.com/book/12986>